Материалы для проведения регионального этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2018–2019 учебный год

Первый день

1–2 февраля 2019 г.

Москва, 2018

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов. (*Н. Агаханов*)

Ответ. 6.

Первое решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$. Тогда условия задачи запишутся в виде

$$1 + a + b = 4 + 2c + d \quad \text{и} \quad 4 + 2a + b = 1 + c + d.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $-3 - a = 3 + c$, то есть $a + c = -6$. Но по теореме Виета $-a$ — это сумма корней первого трёхчлена, а $-c$ — сумма корней второго трёхчлена, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Рассмотрим вспомогательный квадратный трёхчлен $h(x) = g(3 - x)$ (он тоже приведённый!). Тогда $h(x) - f(x)$ — линейный многочлен с корнями 1 и 2; значит, он тождественно нулевой, то есть $f(x) = g(3-x)$. Поэтому, если x_0 является корнем $f(x)$, то $3 - x_0$ является корнем $g(x)$, и сумма этих двух корней равна 3. Аналогично, сумма остальных корней этих многочленов также равна 3.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только верный ответ с приведённым примером двух трёхчленов, удовлетворяющих условиям задачи — 1 балл.

Доказано, что $a + c = -6$ (в обозначениях первого решения) — 3 балла.

Доказано, что $f(x) = g(3 - x)$ — 3 балла.

9.2. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*О. Подлипский*)

Ответ. 8 рыцарей.

Решение. Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Моё число больше 9» и «Моё число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй — 3, …, восьмой — 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-ый рыцарь мог сказать фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+2$», а лжецы могли сказать фразы: один — «Моё число больше 9» и «Моё число меньше 1», а другой — «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 2».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если лжецы задумывают числа вне отрезка $[1;10]$, так как тогда некоторые их высказывания становятся верными.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 — 0 баллов.

Доказано, что рыцарей не больше 8 (или, эквивалентно, лжецов не менее двух) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 8, с верным указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадали лжецы, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

9.3. По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученные Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны.

(*Н. Агаханов, С. Берлов*)

Решение. Пронумеруем числа по часовой стрелке a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} так, чтобы число a_{100} было наименьшим. Тогда остаток от деления a_{100} на a_1 будет равен $a = a_{100}$ (ибо $a_1 > a_{100}$), а остаток b от деления a_{99} на a_{100} будет меньше, чем a_{100}. Значит, $a > b$ — единственные остатки, полученные Васей.

Предположим, что $a_i < a_{i+1}$ при некотором $i < 100$. Тогда остаток от деления a_i на a_{i+1} равен a_i, что больше, чем a (и тем более — чем b). Это невозможно. Значит, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$.

Итак, Петя при делении a_{i+1} на a_i (при любом $i = 1, 2, \ldots, 99$) будет получать в остатке a_{i+1}, поскольку $a_{i+1} < a_i$. При делении же a_1 на a_{100} он получит остаток c, меньший a_{100}. Значит, все его остатки $c < a_{100} < a_{99} < \ldots < a_2$ различны.

Комментарий. Доказано, что существует единственное число, меньшее своего соседа по часовой стрелке (иначе говоря, доказано, что круг можно «разорвать» так, чтобы образовалась монотонная последовательность) — 5 баллов.

Некоторые участники могут доказать лишь, что круг разбивается на две монотонных последовательности. Если сделано только это — 2 балла.

Если дополнительно из этого факта выведено, что среди Петиных остатков хотя бы 99 различных — добавляется 1 балл.

9.4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность Γ, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через Γ' окружность, описанную около треугольника BHC (см. рис. 1). На касательной к Γ' в точке H отметим точку X, лежащую внутри угла BCH. Тогда $\angle BHX = \angle BCH = \angle B_1C_1H$ (последнее равенство следует из того, что $BC \parallel B_1C_1$). Значит, окружность ω касается прямой HX и окружности Γ' в точке H.

Обозначим через H' точку, симметричную H относительно прямой BC (как известно, эта точка лежит на окружности Γ). Итак, при симметрии относительно BC окружность Γ' переходит в окружность Γ, а окружность ω — в себя, поскольку центр ω лежит на прямой BC. Поскольку ω касается Γ', она касается и Γ, что и требовалось доказать.

9.5. Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?

(*С. Долгих*)

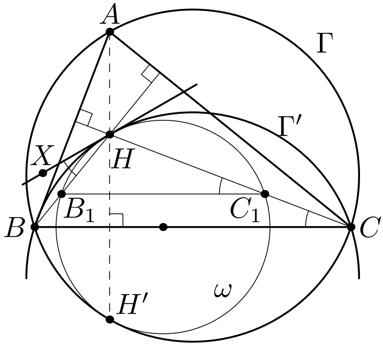

Рис. 1

Ответ. $3 \cdot 1000^2 - 2000 = 2\,998\,000$ клеток.

Решение. Рассмотрим произвольную закраску, удовлетворяющую условию. Разобьём все клетки поверхности на «каёмки» так, как показано на рис. 2 — по 500 каёмок вокруг каждой из восьми вершин (одна из каёмок отмечена серым). Тогда в k-й каёмке, считая от вершины, будет $S_k = 6k - 3$ клеток. Так как никакие две закрашенных клетки не могут быть соседними, в этой каёмке будет не более $\left[\frac{S_k}{2}\right] = 3k - 2 = \frac{S_k - 1}{2}$ закрашенных клеток. Просуммировав по всем 4000 каёмкам и учтя, что их общая площадь равна $6 \cdot 1000^2$, получаем, что общее количество закрашенных клеток не превосходит $\frac{6 \cdot 1000^2 - 4000}{2} = 3 \cdot 10^6 - 2000$.

Осталось привести пример, показывающий, что столько клеток закрасить можно. Назовём две противоположных грани куба *верхней* и *нижней*, а остальные — *боковыми*. На каждой из боковых граней можно отметить половину клеток шахматным образом. После этого на верхней и нижней гранях можно будет также окрасить половину клеток во всех строках, кроме двух крайних, оставив их пустыми — см. рис. 3, где видны две боковых и верхняя грани. Нетрудно видеть, что при такой закраске в каждой каёмке будет максимальное возможное количество закрашенных клеток. (Вместо проверки каждой каёмки можно заметить, что вся поверхность разбивается на полоски 1×100,

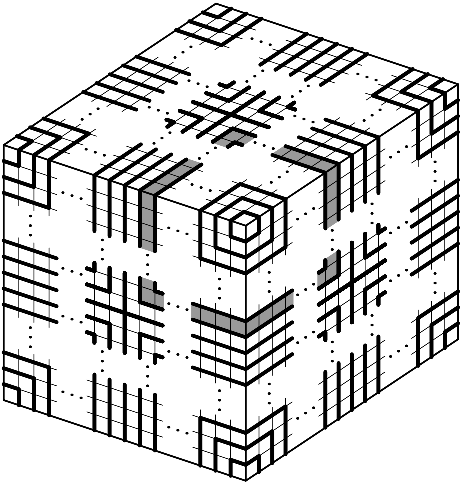

Рис. 2

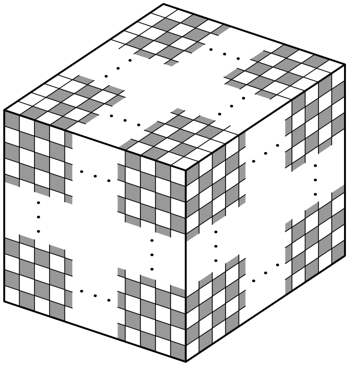

Рис. 3

четыре из которых — пустые, а в каждой из остальных закрашена ровно половина клеток.)

Замечание. Существуют и другие оптимальные примеры. В частности, в приведённом примере закраску верхней грани можно изменить так: разобьём верхнюю грань диагоналями на 4 треугольника, и в каждом из них закрасим клетки шахматным образом (так, чтобы закраска этого треугольника согласовалась с закраской соседней боковой грани).

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведён правильный пример закраски $N = 3 \cdot 1000^2 - 2000$ клеток — 1 балл.

Доказано только, что в любой удовлетворяющей условиям закраске не более N закрашенных клеток — 5 баллов.

10 класс

10.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», …, десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

(*О. Подлипский*)

Ответ. 9 рыцарей.

Решение. *Оценка.* Заметим, что ни один из рыцарей не мог сказать фразу «Моё число больше 10», иначе задуманное им число было бы в самом деле больше 10. Но тогда он не мог бы сказать ни одну из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10». Значит, имеется хотя бы один лжец, а рыцарей не более 9.

Пример. Покажем, что рыцарей могло быть 9. Пусть первый человек загадал число 1,5, второй — 2,5, …, девятый — 9,5, а десятый человек загадал число 5. Тогда при $k = 1, 2, \ldots, 9$ k-ый человек мог сказать правдивые фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+1$» (т. е. он рыцарь), а десятый человек — лжец, говорящий фразы «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 1».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если десятый человек задумывает число вне интервала $(0; 10)$, так как тогда ровно один из его ответов правдив.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 (или, эквивалентно, есть хотя бы один лжец) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 9, с указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадал лжец, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

10.2. Дан выпуклый четырёхугольник периметра 10^{100}, у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб. (*П. Кожевников*)

Решение. Обозначим через a, b, c и d длины сторон, положим $N = 10^{100}$.

Первое решение. Пусть d — наибольшая сторона. Согласно условию, $a + b + c$ делится на d, то есть $a + b + c = kd$ для некоторого натурального k. Ясно, что $a+b+c > d$ (длина отрезка меньше длины ломаной с теми же концами), поэтому $k > 1$. Кроме того, так как $a \leqslant d$, $b \leqslant d$ и $c \leqslant d$, имеем $a + b + c \leqslant 3d$, то есть $k \leqslant 3$.

Случай $k = 3$ возможен только при $a = b = c = d$. В этом случае наш четырёхугольник — ромб.

Иначе $1 < k < 3$, откуда $k = 2$. Но в этом случае имеем $N = a + b + c + d = 2d + d = 3d$. Таким образом получаем противоречие, поскольку N не делится на 3.

Второе решение. Из условия следует, что каждое из чисел a, b, c, d является делителем числа $N = a + b + c + d$. Значит, $a = N/t_a$, $b = N/t_b$, $c = N/t_c$, $d = N/t_d$ для некоторых натуральных $t_a > 1$, $t_b > 1$, $t_c > 1$, $t_d > 1$.

Заметим, что $t_a \neq 2$, иначе длина строны a равна полупериметру, что невозможно, поскольку $a < b + c + d$.

Поскольку N не делится на 3, имеем $t_a \neq 3$, значит, $t_a \geqslant 4$ и $a \leqslant N/4$. Аналогично, $b \leqslant N/4$, $c \leqslant N/4$, $d \leqslant N/4$. Тогда равенство $N = a + b + c + d$ возможно только в случае $a = b = c = d = N/4$, т. е. в случае, когда наш четырёхугольник — ромб.

Замечание. Отметим, что в любом полном решении должны существенно использоваться следующие условия:

1. Неравенство многоугольника (т. е. тот факт, что a, b, c, d — длины сторон четырёхугольника, а не произвольная четвёрка натуральных чисел с суммой N, для которой сумма любых трёх чисел делится на четвёртое). Иначе контрпримером являлась бы четвёрка $N/2$, $N/4$, $N/8$, $N/8$.

2. N не делится на 3. Для N, кратного 6, контрпримером являлся бы четырёхугольник со сторонами $N/3$, $N/3$, $N/6$, $N/6$.

Комментарий. При продвижении в сторону первого решения ставятся следующие баллы (баллы за несколько продвижений суммируются):

Рассмотрена делимость на длину наибольшей стороны и доказано, что $k \leqslant 3$ — 3 балла

Рассмотрен случай $k = 3$ — 1 балл.

Доказано, что $k > 1$ (использовано неравенство многоугольника) — 1 балл.

Доказано, что случай $k = 2$ невозможен (использована делимость на 3) — 2 балла.

При продвижении в сторону второго решения ставятся следующие баллы (баллы за несколько продвижений суммируются):

Получено уравнение $1/t_a + 1/t_b + 1/t_c + 1/t_d = 1$ (или эквивалентное) — 3 балла.

Если уравнение не рассмотрено, а только указано, что периметр делится на длину (любой) стороны — вместо 3 баллов ставится 1 балл.

Рассмотрен случай $t_a \geqslant 4$, $t_b \geqslant 4$, $t_c \geqslant 4$, $t_d \geqslant 4$ — 1 балл.

Доказано, что $t_a \neq 2$ (использовано неравенство многоугольника) — 1 балл.

Доказано, что случай $t_a = 3$ невозможен (использована делимость на 3) — 2 балла.

10.3. Клетки таблицы 2×2019 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы? *(С. Кудря)*

Ответ. 2016.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в первой строке таблицы, в которой числа расставлены по правилам, не менее трёх рациональных чисел (и, соответственно, не более 2016 иррациональных чисел). Каждое из чисел, встречающихся в таблице, записано ровно в двух клетках, одна из которых находится в верхней строке, а другая — в нижней. Рассмотрим некоторый столбец, пусть в его верхней клетке стоит число a_1, а в нижней — a_2 (далее коротко обозначаем такой столбец (a_1, a_2)). Покрасим столбец (a_1, a_2). Найдём столбец, у которого число a_2 находится в верхней клетке, и покрасим его. Если этот столбец — (a_2, a_1), то завершим процесс. Иначе, если этот столбец — (a_2, a_3), где $a_3 \neq a_1$, продолжим: покрасим столбец, у которого число a_3 находится в верхней клетке, и т. д. — пока не дойдём до столбца, у которого в нижней клетке находится a_1 (это обязательно произойдёт, поскольку числа, равные a_2, a_3, $\ldots$, красятся парами). По окончании процесса получим множество покрашенных столбцов (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_k, a_1), которое назовём *циклом* длины k. Если остались ещё непокрашенные столбцы, выделим ещё один цикл, и т. д. В конечном итоге множество всех столбцов таблицы разобьётся на непересекающиеся циклы. Так как сумма длин всех циклов равна 2019, найдётся цикл нечетной длины.

Рассмотрим этот цикл: $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{2t+1}, a_1)$, где $t \geqslant 1$. По условию $a_1 + a_2 = b_1$, $a_2 + a_3 = b_2, \ldots, a_{2t+1} + a_1 = b_{2t+1}$, где все b_i — рациональные числа. Тогда $2a_1 = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \ldots - (a_{2t} + a_{2t+1}) + (a_{2t+1} + a_1) = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots - b_{2t} + b_{2t+1}$ — рациональное число, поэтому a_1 рационально. Аналогично, все числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2t+1} рациональны, и их не менее $2t + 1 \geqslant 3$.

Пример. Приведём пример таблицы, заполненной по правилам, в верхней строке которой 2016 иррациональных чисел:

1	2	3	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$
2	3	1	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$

Замечание. Заметим, что условие нечётности длины строки таблицы существенно. Для чётной длины строки нетрудно построить примеры таблиц, в которых все числа иррациональны.

Условие того, что число не стоит под самим собой, также важно, иначе мог бы появиться цикл длины 1, и ответ в задаче стал бы равен 2018.

Комментарий. Верно доказана оценка (не более 2016 иррациональных или, эквивалентно, не менее 3 рациональных чисел) — 5 баллов.

Утверждение о разбиении перестановки на независимые циклы принимается без доказательства.

При отсутствии доказательства оценки доказано, что в столбцах, образующих цикл нечётной длины, все числа рациональны — 2 балла (из 5 возможных баллов за оценку).

Предъявлен верный пример с 2016 иррациональными числами — 2 балла.

Доказательство иррациональности корней квадратных из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами, корней кубических из натуральных чисел, не являющихся точными кубами, и т. п., не требуется.

10.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $n \geqslant 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, откуда $a_{n+1} < 0$.

Далее, поскольку $P_{n+1}(x) = x^2P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \qquad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ чётна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty, a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ — убывающая.

Комментарий. Замечено, что $a_n < 0$, если n достаточно велико — 1 балл.

Замечено соотношение $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$ — 1 балл (может суммироваться с предыдущим баллом).

Во в целом верном решении утверждается, что последовательность обязательно убывает, начиная с 2018-го (а не с 2019-го) члена — снимается 1 балл.

10.5. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведённой из вершины B, пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке D. Через центр окружности, описанной около треугольника BDL, проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что окружность ω касается прямой ℓ. *(А. Кузнецов)*

Решение. Пусть M — середина отрезка AC, S — вторая точка пересечения прямой BL с окружностью ω, N — середина дуги ABC (см. рис. 4). Тогда S — середина меньшей дуги AC окружности ω, а точки M, S, N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Прямая BN — внешняя биссектриса угла ABC, поэтому $BN \perp BL$. Тогда $\angle LBN + \angle LMN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, откуда мы получаем, что четырехугольник $BLMN$ — вписанный. Обозначим $\angle MBL = \alpha$. Тогда $\angle MNL = \alpha$. Также, так как $BNDS$ — вписанный, $\angle SND = \angle SBD = \alpha$.

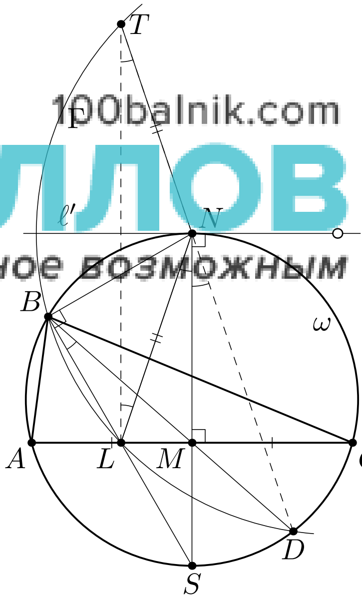

Рис. 4

На продолжении отрезка DN за точку N отметим точку T так, что $LN = NT$. Тогда $\angle LNT = 180^\circ - \angle LNM - \angle SND = 180^\circ - 2\alpha$, откуда следует, что $\angle LTN = \angle TLN = \alpha$. Значит, $\angle LTD = \alpha = \angle LBD$, поэтому точка T лежит на окружности Γ, описанной около треугольника BDL. Пусть ℓ' — касательная в точке N к окружности ω. Поскольку SN — диаметр ω, то $\ell' \perp SN$ и $\ell' \parallel AC$. Как мы знаем, SN является внешней биссектрисой угла LNT, поэтому ℓ' — биссектриса угла LNT. Так как $TL = TN$, получаем, что ℓ' является серединным перпендикуляром к отрезку TL, а потому проходит через центр окружности Г. Таким образом, прямые ℓ и ℓ' совпадают, и прямая ℓ касается ω.

Комментарий. Построена точка T из решения — 1 балл.

11 класс

11.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*О. Подлипский*)

Ответ. 8 рыцарей.

Решение. Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Моё число больше 9» и «Моё число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй — 3, ..., восьмой — 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-ый рыцарь мог сказать фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+2$», а лжецы могли сказать фразы: один — «Моё число больше 9» и «Моё число меньше 1», а другой — «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 2».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если лжецы задумывают числа вне отрезка $[1;10]$, так как тогда некоторые их высказывания становятся верными.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 — 0 баллов.

Доказано, что рыцарей не больше 8 (или, эквивалентно, лжецов не менее двух) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 8, с верным указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадали лжецы, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

11.2. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

(*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть D_1, D_2, D_3 — соответственно дискриминанты этих трёхчленов. Первые два уравнения имеют только целые корни, поэтому $D_1 = m^2$, $D_2 = n^2$, где числа m и n можно считать целыми неотрицательными. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $4 = m^2 - n^2$, то есть $4 = (m-n)(m+n)$. Числа $m-n$ и $m+n$ — одной чётности, поэтому это равенство может выполняться только если $m-n = m+n = 2$. Но тогда $n = 0$, и, значит, дискриминант третьего уравнения $D_3 = n^2 - 4 = -4$ — отрицательный.

Второе решение. По теореме Виета числа a и b целые.

Пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена $P_1(x) = x^2 + ax + b$, а x_0 — любой из корней трёхчлена $P_2(x) = x^2 + ax + b + 1$. Поскольку $P_2(x)$ имеет хотя бы один корень, корни трёхчлена $P_1(x) = P_2(x) - 1$ различны.

Имеем $P_1(x_0) = P_2(x_0) - 1 = -1$, откуда

$$1 = P_1(x_1) - P_1(x_0) = (x_1^2 + ax_1 + b) - (x_0^2 + ax_0 + b) = \\ = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0 + a).$$

Поскольку оба множителя в правой части целые, они могут быть равны лишь ±1. Аналогично, $x_2 - x_0 = x_2 + x_0 + a = \pm1$. Так как $x_1 \neq x_2$, отсюда следует, что $|x_2 - x_1| = 2$ и $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Так как это рассуждение верно для произвольного корня x_0 трёхчлена $P_2(x)$, его корни совпадают, то есть $P_2(x) = (x-x_0)^2$. А тогда многочлен $P_2(x) + 1 = (x-x_0)^2 + 1$ положителен на всей оси, то есть корней не имеет.

11.3. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.

(*И. Богданов*)

Ответ. $55^2 = 3025$ клеток.

Решение. Разобьём доску на 9 квадратов 30×30, 6 прямоугольников 10×30 и один квадрат 10×10 (см. рис. 5). В каждом квадрате 30×30 клетки разбиваются на 15^2 четвёрок так, что расстояние между любыми клетками в одной четвёрке равно 15 (каждая четвёрка состоит из клеток с координатами (a, b), $(a, b+15)$, $(a+15, b)$ и $(a+15, b+15)$). Тогда в любой четвёрке может быть отмечено не более одной клетки, то есть общее число отмеченных клеток в таком квадрате не превосходит 15^2.

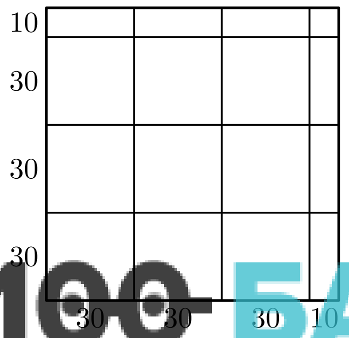

Рис. 5

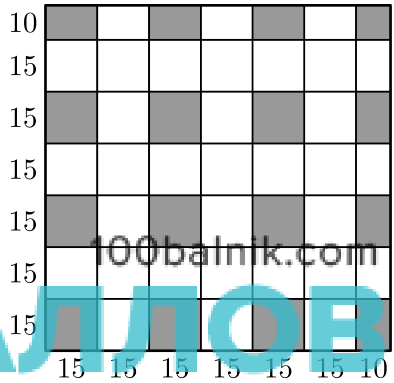

Рис. 6

Аналогично, каждый прямоугольник 10×30 (скажем, с длинной горизонтальной стороной) разбивается на пары клеток, отстоящих друг от друга на 15 (с координатами (a, b) и $(a+15, b)$) — поэтому в нём не более $15 \cdot 10$ отмеченных клеток. Наконец, в квадрате 10×10 всего 10^2 клеток. Итого, отмеченных клеток не больше, чем $9 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 \cdot 10 + 10^2 = (3 \cdot 15 + 10)^2 = 55^2$.

Пример с таким количеством отмеченных клеток показан на рис. 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведён правильный пример отмеченных клеток — 1 балл.

Доказано только, что общее количество отмеченных клеток не более 55^2 — 5 баллов.

11.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, … такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $n \geqslant 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, откуда $a_{n+1} < 0$.

Далее, поскольку $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2 P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \qquad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ чётна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty, a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ — убывающая.

Комментарий. Замечено, что $a_n < 0$, если n достаточно велико — 1 балл.

Замечено соотношение $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$ — 1 балл (может суммироваться с предыдущим баллом).

Во в целом верном решении утверждается, что последовательность обязательно убывает, начиная с 2018-го (а не с 2019-го) члена — снимается 1 балл.

11.5. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны. (*А. Кузнецов*)

Решение. Прямая CF перпендикулярна плоскости ABD, поэтому $CF \perp AD$. Аналогично, $BE \perp AD$. Поэтому прямые CF и BE параллельны плоскости α или лежат в ней. Точки B, C, E и F лежат на сфере ω, описанной около тетраэдра $ABCD$.

Также, поскольку $\angle BEC = 90^\circ = \angle BFC$, точки B, C, E и F лежат на сфере ω', построенной на отрезке BC как на диаметре.

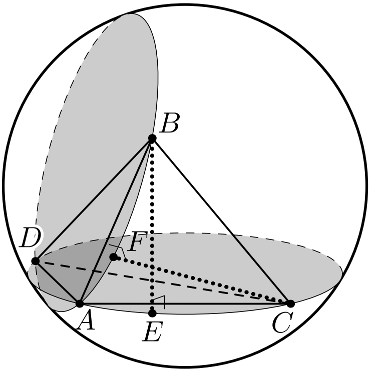

Рис. 7

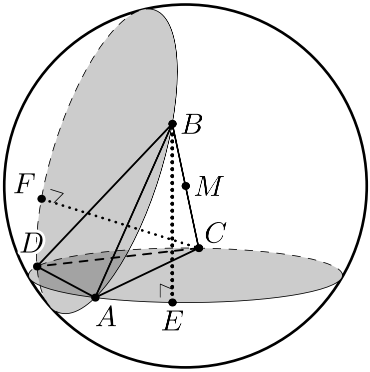

Рис. 8

Если сферы ω и ω' не совпадают, все их общие точки лежат в одной плоскости, обозначим её через β. В плоскости β лежат прямые BE и CF, каждая из которых параллельна плоскости α или лежит в этой плоскости. Также прямые BE и CF не параллельны, поскольку они перпендикулярны пересекающимся плоскостям ACD и ABD. Таким образом, плоскость β параллельна плоскости α или совпадает с ней, а расстояния от точек E и F до α равны расстоянию между плоскостями α и β (см. рис. 7).

Если же сферы ω и ω' совпадают, то их общий центр M является серединой отрезка BC и лежит в плоскости α. Следовательно, расстояния от точек B и C до α равны. Поскольку прямая BE параллельна α, расстояния от B и E до α равны. Аналогично, расстояния от C и F до α тоже равны, а тогда точки E и F равноудалены от α (см. рис. 8).

Комментарий. Разобран только случай, когда сферы не совпадают — 4 балла.

Разобран только случай, когда сферы совпадают — 3 балла.